richt, die inhaltlich in sehr unterschiedliche Richtungen gehen, unkritisch nebeneinanderstehen. Und so werden durch den Sammelband, der die Forschungslücke zu inklusivem Mathematikunterricht zu verkleinern versucht, gleichzeitig neue Desiderata ersichtlich: dass es auch im deutschsprachigen Raum mehr theoretisch reflektierter und vergleichender Beiträge bedarf.

Literatur

Benölken, R., Berlinger, N. & Veber, M. (Hrsg.) (2018). *Alle zusammen! Offene, substanzielle Problemfelder als Gestaltungsbaustein für inklusiven Mathematikunterricht*. Münster: WTM.

Fetzer, M. (2016). *Inklusiver Mathematikunterricht. Ideen für die Grundschule*. Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Häsel-Weide, U. & Nührenbörger, M. (Hrsg.) (2017). *Gemeinsam Mathematik lernen. Mit allen Kindern rechnen*. Frankfurt am Main: Grundschulverband e. V.

Käpnick, F. (Hrsg.) (2016). *Verschieden verschiedene Kinder. Inklusives Fördern im Mathematikunterricht der Grundschule*. Seelze: Klett Kallmeyer.

Korff, N. (2015). *Inklusiver Mathematikunterricht in der Primarstufe. Erfahrungen, Perspektiven und Herausforderungen*. Baltmannsweiler: Schneider-Verl. Hohengehren.

Mendick, H. (2017). Mathematical futures: Discourses of mathematics in fictions of the post-2008 financial crisis. In A. Chronaki (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Mathematics Education and Society Conference* (S. 74–89). Volos: University of Thessaly Press.

David Kollosche, Renato Marcone, Michel Knigge, Miriam Godoy Penteado, Ole Skovsmose: *Inclusive Mathematics Education – State-of-the-Art Research from Brazil and Germany*. Springer International Publishing. Cham 2019. 652 Seiten.

Nina Bohlmann, Universität Leipzig
E-Mail: nina.bohlmann@uni-leipzig.de

Berthold Eckstein: *Brüche, Dezimalzahlen und Prozente darstellen und verstehen*

Rezensiert von Wolfram Meyerhöfer

Es gibt im deutschsprachigen Raum nur wenige *umfassende* Darstellungen zur Didaktik der Bruchrechnung. Das vorliegende Buch stößt in diese Lücke mit einer konsequent unterrichtspraktisch orientierten Darstellung, die einem einzigen didaktischen Ansatz folgt – also kein didaktisches Lehrbuch ist – aber gleichwohl dem Anspruch folgt, das Gebiet umfassend zu erschließen. Der Autor – ein Lehrer mit Unterrichtserfahrung in vielen Altersstufen – ist manchem/r Leser/in vielleicht bekannt von seinem Buch „Mit 10 Fingern zum Zahlverständnis. Optimale Förderung für 4- bis 8-Jährige."

Das Buch beginnt mit einem „Theorie-Kapitel": „Das zentrale Ziel: Aufbau von Grundvorstellungen" (S. 11). Wie andere Autor/innen entkommt auch Eckstein den Wirrnissen des Begriffs nicht. Auch hier bleibt unklar, ob Grundvorstellungen (GV) nun das Verstehen *ermöglichen* oder *sind*, ob „sich etwas vorstellen können" mehr oder weniger oder das Gleiche ist wie „GV haben", ob die Darstellung von mathematischen Inhalten auf verschiedenen Repräsentationsebenen die GV erzeugt oder umgekehrt oder ob „GV haben" gleichzusetzen ist mit der Fähigkeit, diese unterschiedlichen Repräsentationen des Gegenstandes ineinander zu übersetzen. Da das Kapitel aber nur 7 Seiten umfasst, kann man es einfach als grobe Positionierung des Autors im didaktischen Diskurs lesen.

Im Weiteren brennt der Autor ein schönes Feuerwerk der Ideen für uns ab. Er steigt mit „Aufgaben für den Einstieg" (Kapitel 2) ein. Er versammelt hier

- Papier falten (fortlaufende Halbierungen)
- Lakritzschnecken teilen
- Pizzen gerecht teilen
- Quadrate unterschiedlich teilen
- Anordnung von Plättchen in zwei Farben

Alles das hat man anderswo bereits gesehen. – Für jemanden, der das Thema Brüche unterrichten will, ist dies aber eine wohlsortierte, gut kommentierte Zusammenstellung. Wenn man sie gelesen hat, dann kann man morgen ein paar tiefgründige Unterrichtsstunden zur Einführung in die Bruchzahlen halten. Hilfreich ist, dass Eckstein in vielerlei Lernstufen unterrichtet hat. Zu jedem Unterkapitel gibt er an, inwiefern das Thema für die Klassen 5/6, 7/8, 9/10 und für „Jugendliche und Erwachsene“, also für den außerschulischen Grundbildungsbereich, geeignet ist. Seine Darstellungen sind so erfahrungsgesättigt und reflektiert, dass man auch diesen Zuordnungen vertraut.

Kapitel 3 widmet sich der elaborierteren „Entwicklung von Bruchzahlverständnis mit gewöhnlichen Brüchen“. Auch hier haben wir die Themen

- Pizza, Torten oder Sand aufteilen
- Bruchteile von Flüssigkeiten, von Uhrzeiten, von Geldbeträgen, von Strecken
- Bruchteile am Geobrett darstellen
- Quadratunterteilungen, Rechtecke in Bruchteile zerlegen
- Parallelenschar
- Bruchalben

fast alle schon gesehen. Es ist aber sehr prägnant ausgearbeitet, wo die Verstehensknackpunkte sind und wie man mit ihnen umgehen kann.

Bruchzahlen an Bruchstreifen und Zahlenstrahl

Das Kapitel 4 zur „Darstellung von Bruchzahlen am Zahlenstrahl“ kommt ein wenig weniger stringent daher. Hier versucht Eckstein, uns von zweierlei zu überzeugen:

Zunächst behauptet er die unabdingbare Notwendigkeit, Bruchzahlen am Zahlenstrahl und strukturgleich an Bruchstreifen darzustellen. Begründet wird das mit der Behauptung, dass die fundamentalen Ideen zu Bruchzahlen[1] in der linearen Darstellung deutlicher und prägnanter zutage treten als in flächigen Darstellungen. Ausgeführt wird das wenig überzeugend: Die Ausführungen laufen zum größeren Teil eher darauf hinaus, dass in stärkerem Maße Bruchteile von mehreren Ganzen betrachtet werden müssen, was mir aber am Zahlenstrahl ebenso schwierig erscheint wie in anderen Darstellungen. Eckstein lehnt sich mit seiner Überzeugung an die Ausarbeitungen der Gruppe um Susanne Prediger an, deren Begründungen aber auch nicht ganz schlagkräftig rezipiert werden. Gleichzeitig erscheint mir dieser Ansatz aber durchaus reizvoll, so dass ich mir von einem so erfahrenen Lehrenden, wie Eckstein es ist, ein paar empirische Verdichtungen zum praktischen Erfolg dieses Ansatzes gewünscht hätte. Gerade an dieser Stelle – an der ein im didaktischen Diskurs noch nicht durchgesetztes Arbeitsmittel stark gemacht wird und wir als mathematikdidaktische Kommunität Erfahrungsberichte bräuchten – bleibt Eckstein aber auffällig wortkarg. Auch die zahlenstrahligen Darstellungen der Rechenoperationen im späteren Kapitel 6 überzeugen eher nicht von der Schlagkraft dieser Darstellungsform.

Die Zahlenstrahlargumentation ist eng verbunden mit der Forderung, auf den Bruchstreifen und den Zahlenstrahlen von vornherein die gemeinen Brüche mit den zugehörigen Dezimalbrüchen und den zugehörigen Prozenten zu verzahnen. Dieser Ansatz ist ausgesprochen wertvoll und in dieser Form auch innovativ für den Grundbildungsbereich, also für die Arbeit mit Erwachsenen – weil sie diese Begriffe bereits kennen und auch (oft unverständig) mit ihnen arbeiten. Ob ein solches Vorgehen aber auch für junge Lernende geeignet ist, das ist empirisch wenig klar. Hier hätte ich mir von einem erfahrenen Lehrenden einen kritisch reflektierten Erfahrungsbericht gewünscht.

Verbalisierte Materialhandlung versus begriffliche Erschließung

Im Kapitel 5 führt Eckstein in die Darstellung von Dezimalzahlen mit Decimats (und Mehrsystemblöcken und der Stellenwerttabelle) ein. Unterrichtlich besonders produktiv sind hier die Ideen zum Erwerb von Stellenwertverständnis mit den Decimats. Das Kapitel ist aber auch theoriekonzeptionell interessant, weil es die Verwerfungen zeigt, die auftauchen, wenn Praktiker versuchen, ihr Tun in ein Theoriesystem einzuordnen, welches in gewisser Weise weniger leistet als das praktische Tun hergibt. Eckstein bezieht sich auf die „vier Phasen vom konkreten zum gedanklichen Handeln“, welche Wartha und Schulz (2012, S. 63) in Rezeption der Arbeiten von Schipper beschreiben: 1. Die Lernenden handeln am konkreten Material. 2. Die Lernenden beschreiben die Handlung mit Sicht auf das Material. 3. Die Lernenden beschreiben die Handlung ohne Sicht auf das Material. 4. Die Lernenden beschreiben die Handlung „nur“ in der Vorstellung.

Ich kritisiere dieses Konzept aus dem Blickwinkel eines Ansatzes, der die begriffliche Erschließung des mathematischen Gegenstandes in das Zentrum des Lernprozesses stellt (vgl. Meyerhöfer, 2018, konkrete Umsetzung Kwapis, Meyerhöfer u. a., 2018). Aus dem Blickwinkel dieses Ansatzes

[1] Er nutzt hier (S. 56) die sparsame Begriffsfassung von Baireuther (1997, S.1): „1. Bruchzahlen sind Ergebnisse von Divisionen. 2. Eine Bruchzahl kann auf verschiedene Weisen beschrieben werden. 3. Die natürlichen Zahlen sind auch (spezielle) Bruchzahlen. 4. Bruchzahlen sind sehr ungeordnet, solange man verschiedene Nenner betrachtet. 5. Bei Auswahl eines geeigneten Teilbereichs (gleiche Nenner) bekommt man die gewohnte Ordnung der natürlichen Zahlen.“

ist der Knackpunkt der Initiierung von Verstehen nicht das Handeln und die Beschreibung des Handelns, sondern der Knackpunkt ist die Frage, was eigentlich der mathematische Inhalt bzw. Hintergrund der Handlung, was also das zu Verstehende ist. Für die Lehrkraft ist damit die Frage verbunden, was sie selbst konkret zur Handlung sagen muss und was die Lernenden sagen können sollen. Mit diesem Ansatz verschiebt sich der Anspruch an die Lehrkraft (und auch an didaktische Konzeptionen), weil es nicht mehr ausreicht, Handeln und Sprechen über Handeln zu initiieren, sondern weil auch noch ein Anspruch daran expliziert wird, welche Ideen beim Sprechen formuliert werden müssen, damit aus dem Handeln-Sprechen ein Verstehen des mathematischen Inhaltes wird.

Nun deutet sich im Text von Eckstein an, dass er genau diese Verbalisierung der mathematischen Zusammenhänge initiieren will. Er expliziert an vielen Stellen die Ideen, die an die Lernenden herangetragen werden müssen. Aber er verfängt sich eben auch in der Konzeption von Wartha und Schulz. Für die Decimats möchte er z. B. Folgendes: „Die Lernenden sollen Schritt für Schritt vom konkreten zum gedanklichen Darstellen übergehen. Sie sollen die flächige Darstellung von Dezimalzahlen mehr und mehr in der Vorstellung vornehmen.“ (S. 74). Dies erscheint mir wenig sinnvoll: Es kann doch nicht darum gehen, dass die Lernenden Dezimalzahlen in ihrem Kopf flächig darstellen. Die flächige Darstellung dient der *begrifflichen Durchdringung* der Konstruktionsweise der Dezimalzahlen. Zu dieser Durchdringung bedarf es keines Zwischenschrittes der gedanklichen Darstellung des Materials. Vor allem aber produziert die mentale Repräsentation des Materials eben noch kein Verständnis des mathematischen Konstrukts. Auch die Verbalisierung einer Materialhandlung produziert noch nicht auf wundersame Weise ein Verstehen des mathematischen Inhalts. Das merkt man im Buch spätestens dort, wo die Decimats genutzt werden sollen, um auch die Addition und Subtraktion von Dezimalzahlen zu vollführen. Ein solches Vorgehen ist nur sinnvoll, um zu erarbeiten, dass die Decimats für diese Operationen wenig geeignet sind. Die Auseinandersetzung mit den Grenzen des Materials hilft bei der begrifflichen Durchdringung des Aufbaus der Dezimalzahlen und des Operierens mit ihnen.

In Kapitel 7 brennt Eckstein noch einmal ein didaktisches Feuerwerk ab. Es wird unter dem Stichwort „Vernetztes Wissen“ ein breiter Fächer von „Übungen und Spielen zu Brüchen, Dezimalzahlen und Prozenten“ vorgestellt. Im Ganzen legt Berthold Eckstein ein lehrreiches, brauchbares Buch vor, das zügig lesbar und sowohl anregend als auch sofort praktisch verwendbar ist.

Literatur

Baireuther, P. (1997). *Bruchrechnen mit Streifen. Handelnde Erfahrungen zu einem schwierigen Thema.* tinyurl.com/w4q7tos (letzter Zugriff 12. 9. 2019)

Kwapis, J., Meyerhöfer, W., Steffen, O. & Grütte, D. (2018). *Manual zum Jenaer Rechentest für die Klassen 1 bis 4: JRT 1–4*. Münster: WTM-Verlag.

Meyerhöfer, W. (2018). Verständnis – Ein Ansatz zur begrifflichen Erschließung mathematischer Inhalte. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S. 1243–1246). Münster: WTM-Verlag.

Wartha, S. & Schulz, A. (2012). *Rechenproblemen vorbeugen.* Berlin: Cornelsen-Verlag.

Berthold Eckstein: *Brüche, Dezimalzahlen und Prozente darstellen und verstehen*. Klett-Kallmeyer, Seelze 2019. 144 Seiten plus Download-Material, ISBN 978-3-7727-1284-5

Wolfram Meyerhöfer, Universität Paderborn
E-Mail: wolfram.meyerhoefer@upb.de